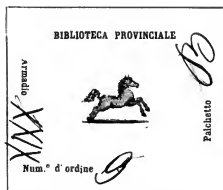
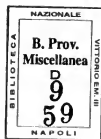


TRUDI

—

INTORNO

AD ALCUNE FORMOLE DI SVILUPPO



$$M(x) = \frac{1}{2} (1 - x^2)$$

INTORNO
AD ALCUNE FORMOLE DI SVILUPPO
NOTA
PER
N. TRUDI



Rendiconto della R. Accademia delle Scienze Fisiche e Matematiche di Napoli

Fascicolo 4.^o — Agosto 1862.

Stamperia del Fibreno 1862

L'analisi possiede già molti mezzi per lo sviluppo delle funzioni ; ed i risultamenti cui si perviene per una o per altra via possono rivestire forme assai diverse tra loro ; ma è noto che in ogni caso gli sviluppi debbono coincidere , in questo senso che i coefficienti delle stesse potenze della variabile debbono essere tra loro equivalenti . Ora nel confronto de' risultamenti che si ottengono sviluppando una funzione con metodi differenti , si ha un principio veramente prezioso , il quale , senza aver riguardo alla convergenza o divergenza delle serie , è capace intanto di condurre a scovrire delle verità che sarebbe difficilissimo di stabilire per altre vie . Noi qui ci proponiamo di dare un saggio della importanza di questo principio facendone l'applicazione allo sviluppo delle funzioni fratte razionali , le quali danno origine , com'è noto , alle così dette serie ricorrenti , riserbandoei di esporre in altre occasioni i risultamenti dei nostri studii per altre funzioni . Ma a ciò dobbiamo aggiungere che l'argomento dello sviluppo delle funzioni è tale un soggetto che non sarà giammai abbastanza studiato ; e per non uscire dalle funzioni , che or prendiamo a considerare , rammenteremo che una sola è veramente la formola generale di sviluppo per tali funzioni , cui finora poteva aversi ricorso , quella cioè data da Lagrange nel 1768 nelle memorie dell'Accademia di Berlino , e riprodotta nella nota XI del trattato della risoluzione delle equazioni numeriche . Non entreremo qui a discorrere della opportunità di questa formola , ma non v'ha chi ignori

quanta pena essa cagioni nelle applicazioni. Noi qui pertanto daremo due nuove formole per lo sviluppo di siffatte funzioni, l'una dipendente dai determinanti; l'altra dalla partizione dei numeri, che sembra ormai la fonte prima dalla quale debba ripetersi il progresso di questa parte di analisi, come ha già mostrato con diversi articoli il nostro chiarissimo collega sig. Emmanuele Fergola.

Considerando lo sviluppo di una funzione fratta razionale, supporremo

$$\frac{b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \dots + b_n x^n}{a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_m x^m} = C_0 + C_1 x + C_2 x^2 + \dots + C_r x^r + \dots$$

I coefficienti di questo sviluppo possono determinarsi per mezzo della divisione ordinaria, ma torna più utile di esprimere i risultamenti per via di determinanti. A tal'effetto moltiplicheremo i due membri dell'eguaglianza pel denominatore del primo; e quindi, eguagliando tra loro i coefficienti delle stesse potenze di x nei due membri, avremo le seguenti relazioni:

$$\begin{aligned} b_0 &= a_0 C_0, \\ b_1 &= a_1 C_0 + a_0 C_1, \\ b_2 &= a_2 C_0 + a_1 C_1 + a_0 C_2, \\ &\dots \dots \dots \\ b_r &= a_r C_0 + a_{r-1} C_1 + a_{r-2} C_2 + \dots + a_0 C_r, \\ &\dots \dots \dots \end{aligned}$$

le quali risolte rispetto a C_r porgono

$$C_r = \frac{-1}{a_0^{r+1}} \begin{vmatrix} a_0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & b_0 \\ a_1 & a_0 & 0 & \dots & 0 & 0 & b_1 \\ a_2 & a_1 & a_0 & \dots & 0 & 0 & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{r-1} & a_{r-2} & a_{r-3} & \dots & a_1 & a_0 & b_{r-1} \\ a_r & a_{r-1} & a_{r-2} & \dots & a_r & a_1 & b_r \end{vmatrix} = \frac{(-1)^r}{a_0^{r+1}} \begin{vmatrix} b_0 & a_0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ b_1 & a_1 & a_0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ b_2 & a_2 & a_1 & a_0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{r-1} & a_{r-1} & a_{r-2} & a_{r-3} & \dots & a_1 & a_0 \\ b_r & a_r & a_{r-1} & a_{r-2} & \dots & a_r & a_1 \end{vmatrix}.$$

E se pongasi

$$K_r = \begin{vmatrix} b_0 & a_0 & 0 & \dots & 0 \\ b_1 & a_1 & a_0 & \dots & 0 \\ b_2 & a_2 & a_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_r & a_r & a_{r-1} & \dots & a_1 \end{vmatrix},$$

si avrà più concisamente

$$C_r = \frac{(-1)^r}{a_0} K_r. \quad (1)$$

Questa formola già somministra una espressione per un coefficiente qualunque dello sviluppo di cui trattasi; ma possiamo darle una forma più conveniente.

Sviluppando il determinante K_r secondo gli elementi della prima verticale, se dinotiamo con $B_0, B_1, B_2, \dots, B_r$ i complementi di $b_0, b_1, b_2, \dots, b_r$, avremo

$$K_r = b_0 B_0 - b_1 B_1 + b_2 B_2 - \dots + (-1)^r b_r B_r = \sum_{i=0}^r (-1)^i b_i B_i.$$

Intanto, siccome B_i , complemento di b_i , è il determinante che si forma da K_r , sopprimendone la prima verticale, e l'orizzontale che passa per b_i , si ha

$$B_i = \begin{vmatrix} a_0 & 0 & \dots & 0 \\ a_1 & a_0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i-2} & a_{i-3} & \dots & a_0 \\ \hline a_{i+1} & a_i & \dots & a_0 \\ a_{i+2} & a_{i+1} & \dots & a_1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_r & a_{r-1} & \dots & a_{r-i+1} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \hline a_i & a_0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ a_{i+1} & a_1 & a_0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{r-i} & a_{r-i-1} & a_{r-i-2} & \dots & a_i & a_1 \end{vmatrix},$$

e cade sotto l'occhio che questo determinante equivale al prodotto dei

due suoi principali minori determinanti formati l'uno nelle prime i linee, e l'altro nelle ultime $r-i$. Ma il primo equivale ad a_0^i , e l'altro, ponendo in generale,

$$\Delta_i = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 & \dots & 0 \\ a_2 & a_1 & a_0 & \dots & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_i & a_{i-1} & a_{i-2} & \dots & a_1 \end{vmatrix},$$

corrisponde a Δ_{r-i} ; così si ottiene

$$B_i = a_0^i \Delta_{r-i};$$

e quindi risulta

$$K_i = \sum_0^r (-1)^i b_i a_0^i \Delta_{r-i}; \quad (2)$$

vale a dire si ha

$$K_i = b_0 \Delta_r - b_1 a_0 \Delta_{r-1} + b_2 a_0^2 \Delta_{r-2} - \dots + (-1)^i b_i a_0^i \Delta_0,$$

essendo evidentemente $\Delta_0 = 1$; ed intanto la (1) diviene

$$C_i = \sum_0^r (-1)^{r-i} \frac{b_i}{a_0^{r-i+1}} \Delta_{r-i}.$$

Le interessanti formole date dal nostro Fergola per calcolare la derivata di un'ordine qualunque di una funzione composta permetterebbero attualmente di sviluppare col teorema di Maclaurin la funzione che abbiamo considerata; ma possiamo ottenere lo stesso intento di una maniera molto più semplice, sviluppando invece la funzione particolare

$$\frac{1}{a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n},$$

cui riducesi la prima con farvi $b_0 = 1$, o $b_1 = b_2 = \dots = b_n = 0$. Questa funzione, ponendo

$$u = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n,$$

si muta in $\frac{1}{u}$. Ora dinotando con $f(u)$ una qualsivoglia funzione della u ,
 ch'è funzione di x , si ha in generale

$$f_x^{(r)}(u) = nr \sum f_u^{(r)}(u) \frac{\left(\frac{u'}{n1}\right)^{e_1} \left(\frac{u''}{n2}\right)^{e_2} \dots \left(\frac{u^{(r)}}{nr}\right)^{e_r}}{n_{e_1} \dots n_{e_r}},$$

dove il simbolo n_s indica il prodotto dei numeri naturali $1, 2, 3, \dots, s$,
 a condizione di ritenersi $n_0 = 1$, ed il Σ va esteso a tutte le soluzioni
 intere e positive, o nulle dell'equazione

$$e_1 + 2e_2 + 3e_3 + \dots + re_r = r, \quad (3)$$

e dove inoltre si è messo per compendio

$$e_1 + e_2 + e_3 + \dots + e_r = s.$$

Ciò premesso supponendo

$$\frac{1}{a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots} = c_0 + c_1x + c_2x^2 + \dots + c_rx^r + \dots$$

avremo per la formola di Maclaurin

$$c_r = \sum f_u^{(r)}(u)_0 \frac{\left(\frac{u'}{n1}\right)^{e_1} \left(\frac{u''}{n2}\right)^{e_2} \dots \left(\frac{u^{(r)}}{nr}\right)^{e_r}}{n_{e_1} \dots n_{e_r}},$$

il zero indicando che dopo le derivazioni bisogna porre $x=0$; ma es-
 sendo $f(u) = \frac{1}{u}$, si ha

$$f_u^{(r)}(u) = \frac{(-1)^r n_r}{u^{r+1}},$$

e quindi

$$f_u^{(r)}(u)_0 = \frac{(-1)^r n_r}{a_0^{r+1}};$$

perchè $u_0 = a_0$; e si ha inoltre evidentemente

$$\frac{u'}{n1} = a_1, \quad \frac{u''}{n2} = a_2, \quad \dots, \quad \frac{u^{(r)}}{nr} = a_r;$$

dunque risulta in fine

$$c_r = \sum (-1)^s \frac{n_s \frac{a_1^{s_1}}{a_1^{s_1+1}} \frac{a_2^{s_2}}{n_s} \dots \frac{a_r^{s_r}}{n_s}}{a_1^{s_1+1} n_s n_{s_1} \dots n_{s_r}}.$$

D'altra parte, siccome l'espressione di c_r può ricavarsi da quella di C_r , data dalla (1), ponendovi $b_s = 1$, e $b_s = b_s = \dots = b_s = 0$, si ha manifestamente

$$c_r = \frac{(-1)^r}{a_1^{s_1+1}} \begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 & \dots & 0 \\ a_s & a_1 & a_0 & \dots & 0 \\ a_3 & a_s & a_1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_r & a_{r-1} & a_{r-2} & \dots & a_1 \end{vmatrix};$$

od ancora, in virtù della notazione adottata pel determinante a dritta,

$$c_r = \frac{(-1)^r}{a_1^{s_1+1}} \Delta_r,$$

dunque, paragonando quest'ultima espressione di c_r con quella trovata poc' anzi, si ottiene

$$\Delta_r = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 & \dots & 0 \\ a_s & a_1 & a_0 & \dots & 0 \\ a_3 & a_s & a_1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_r & a_{r-1} & a_{r-2} & \dots & a_1 \end{vmatrix} = \sum (-1)^{r+s} n_s \cdot a_1^{s_1-1} \frac{a_1^{s_1} a_2^{s_2} \dots a_r^{s_r}}{n_s n_{s_1} \dots n_{s_r}};$$

notevole relazione (*), la quale fa dipendere lo sviluppo del determinante Δ_r dalle soluzioni dell'equazione (3).

A questa formola può agevolmente riportarsi lo sviluppo del determi-

(*) Questa relazione nella ipotesi di $a_s = 1$ è implicitamente compresa in uoe formola annunciata dal Brioschi per la rappresentazione de' numeri Euleriani. (*Annali del Tortolini*, anno 1858, pagina 261).

nante K_r , del quale abbiamo già una espressione nella (2). In fatti per la formola precedente la (2) si muta in

$$K_r = \sum_0^r (-1)^i b_i a_i^r \sum (-1)^{r-i} n_i \cdot a_i^{r-i} b_i \frac{a_1^{i_1} a_2^{i_2} \dots a_{r-i}^{i_{r-i}}}{n_{i_1} n_{i_2} \dots n_{i_{r-i}}},$$

ovvero in

$$K_r = \sum_0^r \sum (-1)^{r-i} n_i \cdot a_i^{r-i} b_i \frac{a_1^{i_1} a_2^{i_2} \dots a_{r-i}^{i_{r-i}}}{n_{i_1} n_{i_2} \dots n_{i_{r-i}}}.$$

Intanto siccome ad i bisogna dare tutt'i valori $0, 1, 2, \dots, r$, ed assumere per ciascuno tutt'i sistemi di valori interi e positivi, incluso il zero, delle $i_1, i_2, \dots, i_{r-i}$, i quali verificano l'equazione

$$i_1 + 2i_2 + 3i_3 + \dots + (r-i)i_{r-i} = r-i, \quad (4)$$

potremo invece riguardare in questa equazione come indeterminata la stessa i , e quindi scrivere più semplicemente

$$K_r = \sum (-1)^{r-i} n_i \cdot a_i^{r-i} b_i \frac{a_1^{i_1} a_2^{i_2} \dots a_{r-i}^{i_{r-i}}}{n_{i_1} n_{i_2} \dots n_{i_{r-i}}}.$$

Anzi, siccome per qualunque valore di i le soluzioni della (4) non sono diverse da quelle dell'equazione

$$i_1 + 2i_2 + 3i_3 + \dots + r i_r = r-i,$$

così sarà anche lecito di scrivere

$$K_r = \sum (-1)^{r-i} n_i \cdot a_i^{r-i} b_i \frac{a_1^{i_1} a_2^{i_2} \dots a_r^{i_r}}{n_{i_1} n_{i_2} \dots n_{i_r}},$$

ove la somma va, come si è detto, estesa a tutte le soluzioni intere e positive, o nulle dell'equazione

$$i_1 + 2i_2 + 3i_3 + \dots + r i_r = r, \quad (5)$$

e dove si ha sempre

$$i_1 + i_2 + i_3 + \dots + i_r = i.$$

Dopo ciò, essendo

$$C_r = \frac{(-1)^r}{a_r^{r+1}} K_r,$$

per l'espressione trovata or ora di K_r avremo ancora

$$C_r = \sum (-1)^s \frac{\pi_s}{a_r^{s+1}} b_s \frac{a_1^{s_1} a_2^{s_2} \dots a_r^{s_r}}{\pi_s \pi_{s_1} \dots \pi_{s_r}}.$$

Le formole fin qui stabilite valgono per lo sviluppo di una funzione fratta razionale secondo le potenze ascendenti della variabile; ma è agevole cosa di dedurne quelle che si rapportano allo sviluppo secondo le potenze discendenti. In fatti supponendo

$$\frac{\beta_0 x^n + \beta_1 x^{n-1} + \dots + \beta_n}{\alpha_0 x^m + \alpha_1 x^{m-1} + \dots + \alpha_m} = \gamma_0 x^{n-m} + \gamma_1 x^{n-m-1} + \dots + \gamma_r x^{n-m-r} + \dots$$

abbiamo come nel primo caso

$$\gamma_r = \frac{(-1)^r}{\alpha_r^{r+1}} \begin{vmatrix} \beta_0 & \alpha_0 & 0 & \dots & 0 \\ \beta_1 & \alpha_1 & \alpha_0 & \dots & 0 \\ \beta_2 & \alpha_2 & \alpha_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \beta_r & \alpha_r & \alpha_{r-1} & \dots & \alpha_1 \end{vmatrix} = \sum (-1)^s \frac{\pi_s}{\alpha_r^{s+1}} \beta_s \frac{a_1^{s_1} a_2^{s_2} \dots a_r^{s_r}}{\pi_s \pi_{s_1} \dots \pi_{s_r}},$$

il Σ dovendo sempre estendersi a tutt'i sistemi di valori interi e positivi, o nulli delle $i, s, s_1, \dots, s_r$, capaci di verificare l'equazione (5).

È noto che, se il numeratore della frazione considerata in ultimo luogo sia la derivata del denominatore, allora i coefficienti dello sviluppo sono le somme delle potenze simili delle radici dell'equazione che si ottiene uguagliando a zero il denominatore; vale a dire si ha in tal caso

$$\gamma_0 = s_0, \gamma_1 = s_1, \gamma_2 = s_2, \dots, \gamma_r = s_r, \dots;$$

ma nella ipotesi attuale abbiamo

$$\beta_0 = m \alpha_0, \beta_1 = (m-1) \alpha_1, \beta_2 = (m-2) \alpha_2, \dots, \beta_r = (m-i) \alpha_i, \dots$$

dunque risulta

$$s_r = \sum (-1)^i \frac{\Pi_i}{a_i^{i+1}} (m-i) a_i \frac{a_1^{i_1} a_2^{i_2} \dots a_r^{i_r}}{\Pi_{a_1} \Pi_{a_2} \dots \Pi_{a_r}}$$

ovvero

$$s_r = m \sum (-1)^i \frac{\Pi_i}{a_i^{i+1}} a_i \frac{a_1^{i_1} a_2^{i_2} \dots a_r^{i_r}}{\Pi_{a_1} \Pi_{a_2} \dots \Pi_{a_r}} + \sum (-1)^{i+1} \frac{\Pi_i}{a_i^{i+1}} i a_i \frac{a_1^{i_1} a_2^{i_2} \dots a_r^{i_r}}{\Pi_{a_1} \Pi_{a_2} \dots \Pi_{a_r}},$$

e siccome il primo termine del secondo membro è nullo, così si ha più semplicemente

$$s_r = \sum (-1)^{i+1} \frac{\Pi_i}{a_i^{i+1}} i a_i \frac{a_1^{i_1} a_2^{i_2} \dots a_r^{i_r}}{\Pi_{a_1} \Pi_{a_2} \dots \Pi_{a_r}};$$

formola alquanto più generale di quella di Waring.





